UBND TỈNH HẢI DƯƠNG
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BẢN MÔ TẢ SÁNG KIẾN

"KHAI THÁC TÍNH CHẤT HÀM ĐẶC TRƯNG

ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ"

Năm học 2013-2014

Phần 1
THÔNG TIN CHUNG VỀ SÁNG KIẾN

1. Tên sáng kiến: ***Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.***

2. Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Giảng dạy và học tập môn toán lớp 12.

3. Tác giả:

Họ và tên: Lê Phương Thúy Nữ

Ngày, tháng, năm sinh: 11 tháng 7 năm 1972.

Trình độ chuyên môn: Thạc sỹ toán học.

Chức vụ, đơn vị công tác: Tổ phó chuyên môn tổ toán trường THPT Hồng Quang, thành phố Hải Dương.

Điện thoại: 0915177557.

4. Đồng tác giả: Không có.

5. Chủ đầu tư tạo ra sáng kiến:

Tên đơn vị: Trường THPT Hồng Quang.

Địa chỉ: Số 01, Phố Chương Dương, Phường Trần Phú, Thành phố Hải Dương, Tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: 0320.3853774.

6. Các điều kiện để áp dụng sáng kiến: Thời gian, đối tượng học sinh lớp 12, học sinh ôn thi đại học và cao đẳng, trung học chuyên nghiệp.

7. Thời gian áp dụng sáng kiến lần đầu: Sáng kiến được áp dụng thử nghiệm từ năm học 2010 - 2011.

HỌ TÊN TÁC GIẢ (KÝ TÊN)	**XÁC NHẬN CỦA CƠ QUAN ĐƠN VỊ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN**

TÓM TẮT SÁNG KIẾN

Trong một vài năm gần đây, việc sử dụng hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình trong các đề thi đại học, cao đẳng và trong các đề thi học sinh giỏi được sử dụng khá phổ biến.

Sáng kiến kinh nghiệm: *"Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số"* nhằm giúp học sinh nắm vững phương pháp sử dụng hàm đặc trưng trong giải toán và kết hợp phương pháp này với các phương pháp khác, linh hoạt trong các cách xử lí để giải quyết các dạng toán.

Trong phần 2, ở mục 1 nêu lên cơ sở lí thuyết để sử dụng trong bài viết. Mục 2.1 là áp dụng khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình đại số, gồm 12 ví dụ, mức độ khó được tăng dần, sau các bài tập cụ thể sẽ đưa ra được các kĩ năng biến đổi, từ đó học sinh sẽ vận dụng linh hoạt trong các bài tập khác. Mục 2.2 là áp dụng để giải các bất phương trình, gồm 8 ví dụ. Khi đã nắm bắt được các kĩ năng ở mục 2 thì sang mục 3, sẽ giải quyết được cho các bài tập về hệ phương trình, qua đó ta sẽ thấy được việc kết hợp, sáng tạo giữa phương pháp sử dụng hàm đặc trưng với các phương pháp khác như phương pháp đưa về phương trình tích, phương pháp hàm số, phương pháp lượng giác hóa, phương pháp đánh giá, vv... nhằm hình thành cho học sinh các kĩ năng biến đổi, khả năng so sánh, phân tích và tổng hợp tốt, đồng thời có một tư duy sáng tạo, linh hoạt khi giải toán. Giúp các em có nhiều hưng phấn, say mê tìm tòi nghiên cứu với môn toán học. Và cuối cùng, phần 3 là kết luận và hướng phát triển của đề tài.

Phần 2
MÔ TẢ SÁNG KIẾN

Hàm đặc trưng tỏ ra rất hiệu quả trong việc giải các phương trình hay hệ phương trình. Trước một bài toán, thường có nhiều cách xử lí khác nhau, nhưng tôi nhận thấy nếu như áp dụng được phương pháp sử dụng hàm đặc trưng thì nhiều khi bài toán sẽ được giải quyết đơn giản, ngắn gọn hơn.

Ví dụ, xét hàm số $f(t)=t^3+t$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$. *Cho* $f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)$, *khai triển và rút gọn ta được ví dụ 2, cho* $f(2x)=f\left(\sqrt{2x+1}\right)$, *ta được* $(2x)^3+(2x)=\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+\sqrt{2x+1}$, *khai triển và rút gọn ta được ví dụ 5, cũng vẫn xét hàm số f(t) ở trên nhưng thay bằng* $f(3x-1)<f\left(\sqrt{x+1}\right)$ *ta được ví dụ 14. Hay xét hàm số* $f(t)=t^3+t^2+2t$ *đồng biến trên* $[0;+\infty)$. *Cho* $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\sqrt{1-x}\right)$, *ta được* $\left(\sqrt{x+1}\right)^3+x+1+2\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{1-x}\right)^3+1-x+2\sqrt{1-x}$, *khai triển và rút gọn ta được ví dụ 7 vv…*

Như vậy ta thấy, về phía giáo viên ra đề, chỉ cần xác định một hàm số luôn đơn điệu, và thay các giá trị hợp lí, thì sẽ được vô số bài tập. Vậy vấn đề đặt ra ở đây là, khi học sinh đứng trước một bài toán, phải làm thế nào để định hướng được cho các em cách giải bài toán đó hợp lí nhất, cách để các em phát hiện được ra một bài toán có thể giải quyết bằng phương pháp hàm đặc trưng hay không và giải quyết nó như thế nào? Đó chính là nội dung mà trong sáng kiến này tôi muốn truyền tải đến bạn đọc.

1. Cơ sở lí thuyết

Dựa vào các kết quả sau ta có thể giải quyết được nhiều phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình đại số.

Kết quả 1: "Nếu hàm số y = f(x) luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên tập D thì số nghiệm trên D của phương trình f(x) = a không nhiều hơn một và $\forall u,v\in D: f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

Kết quả 2: "Nếu hàm số y = f(x) luôn đồng biến và liên tục trên tập D thì $\forall u,v \in D: f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$.

Kết quả 3: "Nếu hàm số y = f(x) luôn nghịch biến và liên tục trên tập D thì $\forall u,v \in D: f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$.

Khi áp dụng trực tiếp cho phương trình và bất phương trình, ta có thể nêu ra phương pháp giải tổng quát như sau.

1.1 Dạng 1

Phương trình đã cho được đưa về dạng: $f(u) = f(v)$ trong đó $u = u(x), v = v(x)$.

Phương pháp:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng: $f(u) = f(v)$, $u, v \in D$.

Bước 2: Xét hàm số $y = f(t)$ trên miền xác định D.

* Tính y' và xét dấu y'.
* Kết luận hàm số $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu trên D.

Bước 3: Kết luận.

* Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $u = v$.
* Giải phương trình: $u = v$.
* Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

1.2. Dạng 2

Bất phương trình đã cho được đưa về dạng: $f(u) < f(v)$ trong đó $u = u(x),\ v = v(x)$.

Phương pháp:

Bước 1: Biến đổi bất phương trình về dạng: $f(u) < f(v)$, $u, v \in D$.

Bước 2: Xét hàm số $y = f(t)$ trên miền xác định D.

* Tính y' và xét dấu y'.
* Kết luận hàm số $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu trên D.
* Nếu *f(t)* đơn điệu tăng thì: $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$.
* Nếu *f(t)* đơn điệu giảm thì: $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$.

Bước 3: Kết luận nghiệm của bất phương trình đã cho.

2. Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình và bất phương trình

** Trong phần này, ở ví dụ 1 ta sẽ xét một số cách giải cụ thể. Nhưng từ những ví dụ sau thì phần bài giải tham khảo, ta chỉ nêu ra cách giải áp dụng hàm đặc trưng mà không nêu các cách giải khác nữa.*

** Trong các ví dụ được đề cập trong mục này, ta chủ yếu xét cho các phương trình và bất phương trình vô tỉ, còn các phương trình đại số khác sẽ được đề cập ở mục 3.*

2.1 Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình

<u>Ví dụ 1</u>. (Đề thi thử đại học lần 1 trường THPT Hồng Quang năm 2014)

Giải phương trình

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Chúng ta đã biết, với một bài toán thì có rất nhiều hướng tư duy khác nhau, từ đó sẽ hình thành ra các cách giải khác nhau. Với bài toán này, tôi xin nêu ra một số cách giải sau, trong đó có cách giải dùng hàm đặc trưng, đó chính là nội dung mà tôi muốn trình bày trong sáng kiến này.

Bài giải tham khảo

Điều kiện $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 2$ (*).

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(2x+4)(2-x)}=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16 \quad (1)$$

Cách giải 1:

$$(1)\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)}-8x=9x^2-32\Leftrightarrow 8\left(2\sqrt{2(4-x^2)}-x\right)=9x^2-32 \quad (1a)$$

* Xét trường hợp 1:

$$2\sqrt{2(4-x^2)}+x=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$$

Thay $x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ vào (1a) không thỏa mãn.

* Xét trường hợp 2: $2\sqrt{2(4-x^2)}+x\ne 0\Leftrightarrow x\ne -\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$$(1a)\Leftrightarrow\frac{8\left(2\sqrt{2(4-x^2)}-x\right)\left(2\sqrt{2(4-x^2)}+x\right)}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}=9x^2-32$$

$$\Leftrightarrow\frac{8\left[8(4-x^2)-x^2\right]}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}=9x^2-32\Leftrightarrow\frac{8\left(32-9x^2\right)}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}=9x^2-32$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-32\right)\left[1+\frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x^2-32=0\\ 1+\dfrac{8}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}=0\end{array}\right.$$

Xét phương trình $9x^2-32=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{32}{9}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Kết hợp điều kiện $x \neq -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ta được $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ thỏa mãn.

Xét phương trình

$$1 + \frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2)} + x} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)} + x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)} = -x - 8.$$

Vì $-2 \le x \le 2 \Rightarrow -x - 8 < 0$ nên phương trình $2\sqrt{2(4-x^2)} = -x - 8$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

✍ *Nhận xét:*

Ở cách giải này, khắc sâu được cho học sinh khi dùng phương pháp nhân liên hợp để giải bất phương trình vô tỉ. Rõ ràng là nếu theo cách giải này, em nào không xét trường hợp biểu thức liên hợp bằng không là không hoàn chỉnh.

Cách giải 2:

$$(1) \Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 + 8x - 32$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 8x - 32 \ge 0 \\ 512(4-x^2) = \left(9x^2 + 8x - 32\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-4-4\sqrt{19}}{9} \\ x \ge \dfrac{-4+4\sqrt{19}}{9} \end{array}\right. \quad (**) \\ 81x^4 - 144x^3 + 512x - 1024 = 0 \quad (1b) \end{cases}$$

Giải phương trình (1b):

$$(1b) \Leftrightarrow 81\left(x^4 - \frac{1024}{81}\right) - 144x\left(x^2 - \frac{32}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{32}{9}\right)\left[81\left(x^2 + \frac{32}{9}\right) - 144x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (Vì } 81\left(x^2 + \frac{32}{9}\right) - 144x = 81x^2 - 144x + 288 = (9x-8)^2 + 224 > 0, \forall x)$$

Với $x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ kết hợp điều kiện (**) ta được $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện (*)). Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

✍ *Nhận xét:*

Ở cách giải này, đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng phân tích thành tích các nhân tử khi gặp phương trình bậc cao cũng như giải phương trình vô tỉ bằng phép biến đổi tương đương.

Cách giải 3:

$$(1) \Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 + 8x - 32 \Leftrightarrow 4\left(8 - 2x^2\right) + 16\sqrt{8-2x^2} + 16 = x^2 + 8x + 16$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{8-2x^2} + 4\right)^2 = (x+4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{8-2x^2} = -x - 8 & (2) \\ 2\sqrt{8-2x^2} = x & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $-2 \le x \le 2 \Rightarrow -x-8<0 \Rightarrow VT(2) \ge 0 > VP(2)$.
Giải phương trình (3):

$$2\sqrt{8-2x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4\left(8-2x^2\right)=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{(Thỏa mãn điều kiện (*)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Ở cách giải này, chúng ta đã linh hoạt đưa được phương trình đã cho về dạng tổng bình phương ở hai vế bằng cách thêm bớt để xuất hiện dạng hằng đẳng thức.

Cũng với phương pháp thêm bớt, ta xét tiếp cách giải sau.

Cách giải 4:

$$(1) \Leftrightarrow 16\sqrt{-2x^2+8}=9x^2+8x-32 \Leftrightarrow 4\left(-2x^2+8\right)+16\sqrt{-2x^2+8}=x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow 4\left(-2x^2+8\right)+16\sqrt{-2x^2+8}=4\left(\frac{x}{2}\right)^2+16\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{-2x^2+8}\right)^2+16\sqrt{-2x^2+8}=4\left(\frac{x}{2}\right)^2+16\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1c)$$

Từ điều kiện $-2 \le x \le 2$ ta có $\dfrac{x}{2} \in [-1;1]$

Xét hàm số Xét hàm số $f(t)=4t^2+16t$ với $t \in [-1;+\infty)$

$f'(t)=8t+16; \quad f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-2 \notin [-1;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên:

t	-∞	-2	-1		+∞
f '(t)	-	0		+	
f(t)				↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số f(t) luôn đồng biến trên $[-1;+\infty)$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $[-1;+\infty)$.

Do đó phương trình:

$$(1c) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{-2x^2+8}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+8}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}\ge 0 \\ -2x^2+8=\dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 9x^2=32 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (Thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

✍ *Nhận xét:*

Rõ ràng nếu học sinh có kĩ năng tương đối tốt để xử lí đưa phương trình đã cho về được dạng xét hàm đặc trưng thì bài toán trở nên đơn giản hơn nhiều.
Cùng với cách giải 4, cũng vẫn là xét hàm số, ta có thể biến đổi phương trình (1) theo cách sau:

$$(1) \Leftrightarrow 8.\sqrt{32-8x^2} = 9x^2+8x-32 \Leftrightarrow \left(\sqrt{32-8x^2}\right)^2 + 8.\sqrt{32-8x^2} = x^2+8x$$

Và khi đó sẽ dẫn đến việc xét hàm đặc trưng $f(t)=t^2+8t$ với $t\in[-2;+\infty)$.

Hoặc, nếu để ý rằng từ điều kiện $-2\le x\le 2$, ta có $\dfrac{x}{2}\in[-1;1]$ và $0\le\sqrt{-2x^2+8}\le 2\sqrt{2}$ thì có thể xét hàm số ở phương trình (1c) là $f(t)=4t^2+16t$ với $t\in\left[-1;2\sqrt{2}\right]$, nhưng thật ra ta chỉ cần xét hàm số f(t) với t xác định như ở cách giải 4.

Tổng quát: *Qua cách giải trên, ta có thể thấy, nếu phương trình có dạng $\mathrm{ax}^2+bx+c=n.\sqrt{\mathrm{ex}+d}$ mà có thể giải bằng phương pháp hàm đặc trưng, thì khi đó ta sẽ đưa phương trình đã cho về dạng*

$$\mathrm{ax}^2+bx+c=n.\sqrt{\mathrm{ex}+d} \Leftrightarrow m(px+u)^2+n(px+u)=m(\mathrm{ex}+d)+n.\sqrt{\mathrm{ex}+d}$$

Với hàm đặc trưng $f(t)=mt^2+nt$ luôn đơn điệu trên miền cần xét thì bài toán có thể dùng phương pháp hàm đặc trưng để giải. Khi đó công việc tiếp theo là phải xác định được các hệ số ở trên bằng cách đồng nhất để tìm các hệ số.

Sau đây ta xét phương trình có dạng $\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d=n.\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}$ mà có thể dùng hàm đặc trưng để giải thì cách làm sẽ như thế nào? Chúng ta xét tiếp ví dụ sau.

<u>Ví dụ 2.</u> Giải phương trình

$$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Đối với bài tập này, cần đưa hai vế phương trình về dạng $f(g(x))=f(h(x))$ với hàm đặc trưng $f(t)=mt^3+nt$. Ta cần đồng nhất sao cho biểu thức ở vế phải có dạng $m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+n.\sqrt[3]{3x-5}$ và so sánh vế phải đó với vế phải của phương trình đã cho nên ta chọn n = 1.

Công việc còn lại là tìm những hạng tử ở vế trái sao cho phương trình đã cho có dạng

$m(px+u)^3+1.(px+u)=m\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^3+1.\sqrt[3]{3x+5}\quad (*)$

Dễ thấy hệ số của x^3 trong khai triển trên là mp^3 và so sánh với hệ số của x^3 trong phương trình đã cho ta được $mp^3 = 8$, có thể xét các trường hợp sau xảy ra

$m = 1$, $p = 2$ hoặc $m = 8$, $p = 1$.

Nếu $m = 1$, $p = 2$ thì $f(t)=t^3+t$. Do đó cần viết phương trình về dạng:

$1.(px+u)^3+1.(px+u)=1.\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x+u)^3+(2x+u)=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow 8x^3+(12u)x^2+(6u^2+2)x+u^3+u=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}\quad (*)$

Mặt khác, ta có thể viết lại phương trình đã cho như sau:

$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+56x-30=3x-5+1.\sqrt[3]{3x-5}\quad (**)$

Từ (*) và (**), đồng nhất với hệ số ở vế trái của phương trình, ta được hệ:

$$\begin{cases}12u=-36\\ 6u^2+2=56\Leftrightarrow u=-3\\ u^3+u=-30\end{cases}$$

Do trường hợp này thỏa mãn nên ta không xét trường hợp sau nữa.

Bài giải tham khảo

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow (2x-3)^3+(2x-3)=\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$(1)\Leftrightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$

$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow x\in\left\{2;\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T=\left\{2;\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Tương tự, ta xét tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Hoàn toàn tương tự bài trên, ta cũng sẽ tìm được $n = 5$, $m = p = 1$, $u = 5$.

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

$x^3-15x^2+78x-141=5.\sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow (x-5)^3+5(x-5)=\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3+5.\sqrt[3]{2x-9}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+5t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+5>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(x-5)=f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)\Leftrightarrow x-5=\sqrt[3]{2x-9}\Leftrightarrow (x-5)^3=2x-9$$

$$\Leftrightarrow x^3-15x^2+73x-116=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-11x+29)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{4;\frac{11\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $T=\left\{4;\frac{11\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Tổng quát:

Qua hai ví dụ trên, ta có thể tổng quát như sau. Khi gặp phương trình dạng $ax^3+bx^2+cx+d=n.\sqrt[3]{ex+v}$ (1) *mà giải được bằng phương pháp hàm đặc trưng thì cách giải sẽ là:*

Bước 1: Xác định các hệ số m, p, u sao cho

$$ax^3+bx^2+cx+d=n.\sqrt[3]{ex+v}\Leftrightarrow m(px+u)^3+n(px+u)=m(ex+v)+n.\sqrt[3]{ex+v}$$

Bước 2: Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng $f(t)=mt^3+nt$*, chứng minh được hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên miền cần xác định.*

Khi đó ta có phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(px+u)=f\left(\sqrt[3]{ex+v}\right)\Leftrightarrow px+u=\sqrt[3]{ex+v} \quad (2)$$

Bước 3: Tìm cách giải cho phương trình (2).

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}\ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

- Nhìn qua bài toán ta thấy vế trái là đa thức có bậc 3, vế phải có bậc $\frac{3}{2}$ *nên có thể gây cho chúng ta khó khăn khi dùng tính đơn điệu của hàm số. Nhưng ở vế phải, nếu ta xem* $y=\sqrt{3x+1}$ *thì vế phải cũng có thể coi là một đa thức bâc 3 theo y, và khi đó ta sẽ tách biểu thức ở vế phải như sau:*

$$(3x+2)\sqrt{3x+1}=\left[(3x+1)+1\right]\sqrt{3x+1}=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}$$

vì vậy, ta sẽ nghĩ đến việc phân tích vế trái được thành dạng $m(px+u)^3+n(px+u)$*, trong đó sẽ xác định được ngay m = 1, n =1.*

Lúc này, ta phải tìm p, u sao cho $x^3+3x^2+4x+2=1.(px+u)^3+1.(px+u)$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+4x+2=px^3+\left(3p^2u\right)x^2+\left(3pu^2+p\right)x+u^3+u$

từ đó đồng nhất hệ số, ta cũng có hệ phương trình:

$$\begin{cases} p=1 \\ 3p^2u=3 \\ 3pu^2+p=4 \\ u^3+u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ u=1 \end{cases}.$$ *Do đó* $x^3+3x^2+4x+2=\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$ (*).

$$x^3+3x^2+4x+2=\left(3x+2\right)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}\ (1)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$$\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x+1\right)=f\left(\sqrt{3x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x+1=\left(x+1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{0;1\right\}$.

Ta xét tiếp bài phương trình vô tỉ trong đề thi Cao đẳng năm 2012.

<u>Ví dụ 5</u>. (Đề thi Cao đẳng 2012) Giải phương trình

$$4x^3+x-\left(x+1\right)\sqrt{2x+1}=0\ \left(x\in\mathbb{R}\right).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Biểu thức ở trong căn bậc hai là 2x + 1, vì vậy ta sẽ phải biến đổi để sao cho một vế của phương trình biểu diễn được qua 2x + 1, và vì vậy để thuận tiện, ta sẽ nhân hai vế của phương trình đã cho với 2, khi đó ta có 2(x + 1) = (2x + 1) + 1, và tương tự như cách phân tích ở ví dụ trên, bài toán này sẽ được giải theo cách dùng hàm đặc trưng.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$ $\left(*\right)$.

$$4x^3+x-\left(x+1\right)\sqrt{2x+1}=0\Leftrightarrow 8x^3+2x=2\left(x+1\right)\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x\right)^3+\left(2x\right)=\left[\left(2x+1\right)+1\right]\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x\right)^3+\left(2x\right)=\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+\sqrt{2x+1}\quad(1)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do đó phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(2x)=f\left(\sqrt{2x+1}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\4x^2-2x-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $T=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Tổng quát: *Từ hai ví dụ trên, ta có thể tổng quát như sau. Khi gặp phương trình dạng* $ax^3+bx^2+cx+d=(e_1x+v_1)\sqrt{ex+v}$ (1) *mà giải được bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng thì cách giải sẽ là:*
<u>Bước 1</u>: Xác định các hệ số m, n, p, u sao cho

$$ax^3+bx^2+cx+d=(e_1x+v_1).\sqrt{ex+v}$$

$$\Leftrightarrow m(px+u)^3+n(px+u)=m\left(\sqrt{ex+v}\right)^3+n.\sqrt{ex+v}$$

<u>Bước 2</u>: Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng $f(t)=mt^3+nt$, *chứng minh hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên miền cần xác định.*
Khi đó ta có phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(px+u)=f\left(\sqrt{ex+v}\right)\Leftrightarrow px+u=\sqrt{ex+v}\quad(2)$$

<u>Bước 3</u>: Tìm cách giải cho phương trình (2).
- Cũng với hướng suy nghĩ như trên, đối với bài toán sau, ta sẽ biến đổi bằng cách biểu diễn vế phải qua 2x - 1 bằng cách thêm bớt để làm xuất hiện biểu thức 2x - 1.

<u>Ví dụ 6.</u> Giải phương trình

$$x^3+1=2.\sqrt[3]{2x-1}\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

$$x^3+1=2.\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow x^3+2x=2x-1+2.\sqrt[3]{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3+2.\sqrt[3]{2x-1}\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$.
$f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do đó phương trình

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^3 = 2x-1 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $T = \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Tổng quát: *Ta có thể thấy, đối với phương trình có dạng* $x^3 - b = a.\sqrt[3]{\text{ax} + b}$ (1) *với a > 0 (x là ẩn) ta luôn đưa được về hàm đặc trưng để giải quyết bằng cách như sau:*

$(1) \Leftrightarrow x^3 + \text{ax} = \text{ax} + b + a.\sqrt[3]{\text{ax} + b} \Leftrightarrow x^3 + \text{ax} = \left(\sqrt[3]{\text{ax} + b}\right)^3 + \sqrt[3]{\text{ax} + b}$

Với hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + at$*, phương trình đã cho được biến đổi về phương trình* $x = \sqrt[3]{\text{ax} + b} \Leftrightarrow x^3 = \text{ax} + b$.

Lưu ý*: bài toán (1) cũng giải được theo cách đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, nhưng trong phạm vi bài viết, chúng ta chỉ xét đến cách giải bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng.*

- Trên đây là một số bài toán mà ta đã sử dụng phương pháp hàm đặc trưng để giải, nhưng các phương trình đại số thì rất phong phú, đa dạng, không phải bài nào cũng đưa được về những dạng trên, mà đòi hỏi các em học sinh phải hình thành các kĩ năng cần thiết, linh hoạt trong các cách biến đổi để có thể tìm ra được hàm đặc trưng thích hợp cho từng bài.

Với ví dụ sau, ta xem cách xử lí để áp dụng được hàm đặc trưng cho bài toán này như thế nào?

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$(x+3).\sqrt{x+1} + (x-3).\sqrt{1-x} + 2x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Điều đầu tiên nghĩ đến là sẽ biểu diễn được x + 3 và x - 3 theo hai biểu thức trong căn bậc hai. Vậy thì khi đó, còn lại số hạng 2x, ta cũng phải biểu diễn được chúng qua (x + 1) và (1 - x), dễ dàng có được: 2x = (x +1) - (1 - x), và với điều kiện $-1 \le x \le 1$ *thì ta viết được* $x + 1 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$ *và* $1 - x = \left(\sqrt{1-x}\right)^2$*, như vậy bài toán đã được giải quyết.*

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ (*).

Ta có: $(x+3).\sqrt{x+1} + (x-3).\sqrt{1-x} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[(x+1) + 2\right].\sqrt{x+1} + 2x = \left[(1-x) + 2\right].\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 + 2\sqrt{1-x} \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ với $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2t+2>0,\forall t\in[0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $[0;+\infty)$. Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$.
Do đó phương trình
$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x+1=1-x\Leftrightarrow x=0$
(thỏa mãn điều kiện (*)).
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}\quad(1)\ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*
Ở ví dụ này, nếu nhìn kĩ thì ta thấy các biểu thức dưới dấu căn ở hai vế có chung một mối liên hệ là $x+2=(x+1)+1$ và $2x^2+1=(2x^2)+1$, do vậy nếu đặt $u=\sqrt[3]{x+1}$ và $v=\sqrt[3]{2x^2}$ thì phương trình đã cho trở thành: $\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v$, khi đó ta thấy phương trình sẽ được giải bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng, trong đó hàm đặc trưng ở đây là $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$.

Bài giải tham khảo

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.
Đặt $u=\sqrt[3]{x+1}$ *và* $v=\sqrt[3]{2x^2}$ khi đó phương trình đã cho trở thành:
$\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v\quad(1a)$
Xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$ với $t\in\mathbb{R}$.
$f'(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt[3]{\left(t^3+1\right)^2}}+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do đó phương trình $(1a)\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.
Với u = v ta có $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$
Vậy phương trình có tập nghiệm: $T=\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$.

Tương tự, ta xét tiếp ví dụ sau xem kĩ năng biến đổi như thế nào?

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+3x\sqrt{9x^2+2}+5x+3=0\quad(1)\ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*
Vì phương trình này chứa hai biểu thức có căn, nên đầu tiên ta sẽ nghĩ đến việc chuyển mỗi căn ở một vế của phương trình, do đó phương trình (1) có thể viết lại như sau: $(1)\Leftrightarrow(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+5x+3=-3x\sqrt{9x^2+2}\quad(1)$

Ở biểu thức trong căn ở vế trái phương trình ta thấy có thể viết như sau

$\sqrt{4x^2+12x+11}=\sqrt{\left(2x+3\right)^2+2}$

và ở vế phải của phương trình có thể viết lại như sau

$-3x\sqrt{9x^2+2}=\left(-3x\right)\sqrt{\left(-3x\right)^2+2}$

Vậy thì còn lại số hạng $5x+3$ ta thấy cũng có thể biểu diễn được qua 2x + 3 và -3x, khi đó ta có lời giải của bài toán như sau.

Bài giải tham khảo

Ta có $\begin{cases} 9x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R} \\ 4x^2+12x+11=\left(2x+3\right)^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Do đó tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow (2x+3)\sqrt{(2x+3)^2+2}+2x+3=\left(-3x\right)\sqrt{\left(-3x\right)^2+2}+\left(-3x\right) \quad \left(1a\right)$

Xét hàm số $f(t)=t.\sqrt{t^2+2}+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=\dfrac{2t^2+2}{\sqrt{t^2+2}}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $\left(1a\right)\Leftrightarrow f\left(2x+3\right)=f\left(-3x\right)\Leftrightarrow 2x+3=-3x\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{3}{5}$.

<u>Ví dụ 10</u>. Giải phương trình

$$x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\ \left(x\in\mathbb{R}\right).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Ta thấy, việc biến đổi để đưa ra được hàm đặc trưng ở ví dụ này không phải là đơn giản, để tạo ra sự đồng bậc, làm tiền đề để đưa được về hàm đặc trưng thì ta thấy, có thể nghĩ đến việc đặt biểu thức căn bậc ba là một ẩn mới. Khi đó cách sử lí tiếp theo là gì? Chúng ta cùng theo dõi tiếp.

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, ta có hệ :

$\begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ y^3=7x^2+9x-4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ 7x^2+9x-4=y^3 \end{cases}$

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được phương trình

$x^3+3x^2+4x+2=y^3+y\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)=y^3+y \quad \left(1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x+1\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow y=x+1$

Với y = x +1 ta có phương trình:

$$x+1=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow (x+1)^3=7x^2+9x-4\Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{5;\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Với cách suy luận tương tự bài trên, thì chúng ta cũng có thể giải quyết được bài toán dưới đây, nhưng đòi hỏi một chút sáng tạo khi biến đổi.

<u>Ví dụ 11</u>. (Đề nghị Olympic 30/4/2009) Giải bất phương trình

$$x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3-6x^2+12x-7=y \\ y^3=-x^3+9x^2-19x+11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^3-12x^2+24x-14=2y \\ -x^3+9x^2-19x+11=y^3\end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được

$$x^3-3x^2+5x-3=y^3+2y\Leftrightarrow (x-1)^3+2(x-1)=y^3+2y\quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f(y)\Leftrightarrow y=x-1$

Với y = x - 1 ta có phương trình:

$$\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}=x-1\Leftrightarrow -x^3+9x^2-19x+11=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow\quad x^3-6x^2+11x-6=0\quad\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow x\in\{1;2;3\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{1;2;3\}$.

<u>Ví dụ 12</u>. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{4x^4-12x^3+9x^2+16}-2x^2+3x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)=8\quad (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Với bài này ta chưa nhìn ngay ra được hàm đặc trưng cần xét, khi đó ta phải tìm cách biến đổi để làm sao xuất hiện ra hàm đặc trưng. Vì vậy ta sẽ nghĩ đến sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhưng đặt như thế nào?

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ 4x^4-12x^3+9x^2+16\ge 0 \end{cases} \begin{cases} x\ge -3 \\ x\ge 1 \\ \left(2x^2-3x\right)^2+16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$ (*).

Đặt $u=x^2-\dfrac{3x}{2}, v=\sqrt{x-1}\ge 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\left(\sqrt{4u^2+16}-2u\right)\left(\sqrt{v^2+4}+v\right)=8\Leftrightarrow\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\sqrt{v^2+4}+v\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{u^2+4}-u=\frac{4}{\sqrt{v^2+4}+v}\Leftrightarrow\sqrt{u^2+4}-u=\sqrt{v^2+4}-v \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+t$ với $t\in\mathbb{R}$,

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\dfrac{\sqrt{t^2+4}+t}{\sqrt{t^2+4}}>\dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+4}}=\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+4}}\ge 0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1)\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Ta có $x=v^2+1$. Do đó

$$u=v\Leftrightarrow\left(v^2+1\right)^2-\frac{3}{2}\left(v^2+1\right)=v\Leftrightarrow 2v^4+v^2-2v-1=0$$

$$\Leftrightarrow(v-1)\left(2v^3+2v^2+3v+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} v=1 \\ 2v^3+2v^2+3v+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Với $v\ge 0$ ta có $2v^3+2v^2+3v+1\ge 0+0+0+1>0$ do đó (2) vô nghiệm.

Với v = 1 ta có x = 2 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

Qua các ví dụ trên, phần nào ta đã có được một số kinh nghiệm khi áp dụng tính chất hàm đặc trưng để giải cho các phương trình. Tương tự, cũng vẫn khai thác tính chất của hàm đặc trưng, ta sẽ xét tiếp việc áp dụng đối với bất phương trình.

2.2 Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải bất phương trình

Ở phần phương trình, chúng ta đã đưa ra một số dạng tổng quát để giải quyết các bài toán bằng phương pháp hàm đặc trưng, cũng theo cách phân tích tương tự như ở mục 2.1 chúng ta cũng xét các bất phương trình sau theo hướng đưa về phương trình đặc trưng như ở mục trên.

Ví dụ 13. Giải bất phương trình

$$4x^3+18x^2+27x+14<\sqrt[3]{4x+5} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Ở ví dụ này, nếu giữ nguyên bất phương trình và đồng nhất hệ số thì ta cũng vẫn tìm được kết quả nhưng quá trình biến đổi sẽ phức tạp, cồng kềnh, để cho dễ dàng trong việc tính toán, ta nên nhân hai vế của bất phương trình với 2, vì ta để ý $(2x)^3 = 8x^3$. *Và khi đó ta tìm được* $n = 2, m = 1, p = 2, u = 3$.

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

$4x^3+18x^2+27x+14<\sqrt[3]{4x+5}\Leftrightarrow 8x^3+36x^2+54x+28<2\sqrt[3]{4x+5}$

$\Leftrightarrow (2x+3)^3+2(2x+3)<\left(\sqrt[3]{4x+5}\right)^3+2\sqrt[3]{4x+5}\quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3t^2+2>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình

$(1)\Leftrightarrow f(2x+3)<f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right)\Leftrightarrow 2x+3<\sqrt[3]{4x+5}\Leftrightarrow (2x+3)^3<4x+5$

$\Leftrightarrow 4x^3+18x^2+25x+11<0\Leftrightarrow (x+1)(4x^2+14x+11)<0$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{-7-\sqrt{5}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-7+\sqrt{5}}{4};-1\right).$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=\left(-\infty;\dfrac{-7-\sqrt{5}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-7+\sqrt{5}}{4};-1\right).$

Tổng quát:

- *Qua ví dụ trên, ta có thể tổng quát như sau. Khi gặp phương trình dạng* $ax^3+bx^2+cx+d<n.\sqrt[3]{ex+v}\ (1)$ *mà giải được bằng phương pháp hàm đặc trưng thì cách giải sẽ là:*

<u>Bước 1</u>: Xác định các hệ số m, p, u sao cho

$ax^3+bx^2+cx+d<n.\sqrt[3]{ex+v}\Leftrightarrow m(px+u)^3+n(px+u)<m(ex+v)+n.\sqrt[3]{ex+v}$

<u>Bước 2</u>: Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng $f(t)=mt^3+nt$, *chứng minh được hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên miền cần xác định.*

Khi đó nếu hàm số f(t) đồng biến trên miền xác định thì bất phương trình

$(1)\Leftrightarrow f(px+u)<f\left(\sqrt[3]{ex+v}\right)\Leftrightarrow px+u<\sqrt[3]{ex+v}\quad (2)$

nếu hàm số f(t) nghịch biến trên miền xác định thì bất phương trình

$(1)\Leftrightarrow f(px+u)<f\left(\sqrt[3]{ex+v}\right)\Leftrightarrow px+u>\sqrt[3]{ex+v}\quad (2')$

<u>Bước 3</u>: Tìm cách giải cho phương trình (2) (hoặc (2').

- Hoàn toàn tương tự đối với các bất phương trình

$$ax^3+bx^2+cx+d\le n.\sqrt[3]{ex+v}$$
$$ax^3+bx^2+cx+d>n.\sqrt[3]{ex+v}$$
$$ax^3+bx^2+cx+d\ge n.\sqrt[3]{ex+v}$$

Sau đây, ta xét tiếp đến ví dụ 2.

<u>Ví dụ 14</u>. Giải bất phương trình

$$27x^3-27x^2+12x-2<(x+2)\sqrt{x+1}\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Nhìn qua bài toán ta thấy vế trái là đa thức có bậc 3, vế phải có bậc $\frac{3}{2}$ nên có thể gây cho chúng ta khó khăn khi dùng tính đơn điệu của hàm số. Nhưng ở vế phải, nếu ta xem $y=\sqrt{x+1}$ thì vế phải cũng có thể coi là một đa thức bâc 3 theo y, và khi đó ta sẽ tách biểu thức ở vế phải như sau:

$$(x+2)\sqrt{x+1}=\left[(x+1)+1\right]\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}$$

Vậy thì lúc này ta có thể giải quyết bất phương trình đã cho theo hướng giống như ở bài toán trên.
Ta dễ dàng xác định được n = 1, m = 1, từ đó, bằng cách đồng nhất hệ số, ta tìm tiếp được p =3 và u = -1.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge -1$ (*).

$$27x^3-27x^2+12x-2<(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow(3x-1)^3+3x-1<\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(3x-1)<f\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}>3x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-1<0\\x+1\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}3x-1\ge 0\\x+1>(3x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<\frac{1}{3}\\\begin{cases}x\ge\frac{1}{3}\\9x^2-7x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<\frac{1}{3}\\\begin{cases}x\ge\frac{1}{3}\\0<x<\frac{7}{9}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\le x<\frac{7}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le x<\frac{7}{9}.$$

Kết hợp điều kiện (*) ta được $-1\le x<\frac{7}{9}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=\left[-1;\frac{7}{9}\right)$.

<u>Ví dụ 15</u>. Giải bất phương trình

$$8x^3+2x>(x+2).\sqrt{x+1}\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge -1$ (*).

$$8x^3+2x>(x+2).\sqrt{x+1}\Leftrightarrow(2x)^3+2x>\left[(x+1)+1\right]\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow(2x)^3+2x>\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(2x)>f\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}<2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge0\\x+1<(2x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\4x^2-x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\\x>\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $x>\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $T=\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};+\infty\right)$.

Tổng quát: *Từ hai ví dụ trên, ta có thể tổng quát như sau. Khi gặp phương trình dạng* $\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d<(\mathrm{e}_1\mathrm{x}+v_1)\sqrt{\mathrm{ex}+v}$ (1) *mà giải được bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng thì cách giải sẽ là:*

<u>Bước 1</u>: Xác định các hệ số m, p, u sao cho

$$\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d<(\mathrm{e}_1\mathrm{x}+v_1).\sqrt{\mathrm{ex}+v}$$

$$\Leftrightarrow m(px+u)^3+n(px+u)<m\left(\sqrt{\mathrm{ex}+v}\right)^3+n.\sqrt{\mathrm{ex}+v}$$

<u>Bước 2</u>: Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng $f(t)=mt^3+nt$, *chứng minh hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên miền cần xác định.*

Khi đó nếu hàm số f(t) đồng biến trên miền xác định thì bất phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(px+u)<f\left(\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}\right)\Leftrightarrow px+u<\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}\quad(2)$$

nếu hàm số f(t) nghịch biến trên miền xác định thì bất phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(px+u)<f\left(\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}\right)\Leftrightarrow px+u>\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}\quad(2')$$

<u>Bước 3</u>: Tìm cách giải cho phương trình (2).

- Hoàn toàn tương tự đối với các bất phương trình

$$\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d\le(\mathrm{e}_1\mathrm{x}+v_1)\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}$$

$$\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d>(\mathrm{e}_1\mathrm{x}+v_1)\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}$$

$$\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d\ge(\mathrm{e}_1\mathrm{x}+{}_1)v\sqrt[3]{\mathrm{ex}+v}$$

- Cũng giống như phương trình, các bất phương trình cũng vô cùng phong phú, và không phải khi giải bất phương trình ta chỉ gặp những dạng nêu trên. Do đó đòi hỏi người học phải biết tìm tòi, sáng tạo,linh hoạt khi đứng trước một bài toán. Chúng ta xét các ví dụ tiếp sau.

Ví dụ 16. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}\quad (1)\ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Ở đây ta phải để ý thấy $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{(x-1)^2+2}$ *và* $\sqrt{x^2-6x+11}=\sqrt{(3-x)^2+2}$ *và từ đó sẽ nhận ra được hàm đặc trưng.*

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\ge 0\\3-x\ge 0\\x^2-2x+3\ge 0\\x^2-6x+11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x\le 3\\(x-1)^2+2\ge 0\\(x-3)^2+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3\quad (*).$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}\quad (1a)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\in[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$.

Do đó bất phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3-x\Leftrightarrow x>2$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được $2<x\le 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(2;3]$.

✍ *Nhận xét:*

- Ở ví dụ trên ta cũng có thể nhận thấy cách giải khác là dùng phương pháp nhân liên hợp, nhưng như đã nói từ ví dụ 1, trong các ví dụ chúng ta chỉ nói đến phương pháp áp dụng trong sáng kiến là khai thác tính chất của hàm đặc trưng.

- Ở ví dụ trên ta có thể thay hàm $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ *bởi hàm* $g(t)=\sqrt{t^4+2}+t$ *với* $t\in[0;+\infty)$, *và khi đó* $g'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0,\forall t\in[0;+\infty)$.

Ví dụ 17. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)}\ (x\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Dễ thấy ở vế phải ta có thể tách ra thành hai biểu thức có liên quan với vế trái, và từ đó ta có được cách giải sau.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ 3x^2+3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \\ 3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(3x^2+3x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{3x^2+3x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+x+1}<\sqrt{3x^2+3x+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{3x^2+3x+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{2}.\frac{1}{t}$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2}>0, \forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$.

Do đó bất phương trình

$(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+x+1\right)<f\left(3x^2+3x+1\right)\Leftrightarrow x^2+x+1<3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Ví dụ 18. Giải bất phương trình

$$x-\sqrt{3x-2}\le\sqrt{9x^2-6x}-x\sqrt{x^2+2} \quad (1)\ \left(x\in\mathbb{R}\right).$$

✍ *Nhận xét:*

Quan sát bất phương trình đã cho, ta có thể nhóm x và $x\sqrt{x^2+2}$, $\sqrt{3x-2}$ và $\sqrt{9x^2-6x}$ *với nhau (vì với điều kiện để phương trình có nghĩa thì* $\sqrt{9x^2-6x}=\sqrt{3x(3x-2)}=\sqrt{3x-2}.\sqrt{3x}$ *).*

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$ (*)

$(1)\Leftrightarrow x+x\sqrt{x^2+2}\le\sqrt{3x-2}+\sqrt{(3x-2)3x}$

$\Leftrightarrow x+x\sqrt{x^2+2}\le\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x-2}.\sqrt{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2+2}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+t\sqrt{t^2+2}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=1+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình $(1)\Leftrightarrow f\left(x\right)\le f\left(\sqrt{3x-2}\right)\Leftrightarrow x\le\sqrt{3x-2}\quad(2)$

Với điều kiện (*) ta có: $(2)\Leftrightarrow x^2\le 3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$

Kết hợp điều kiện (*) ta được $1\le x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=\left[1;2\right]$.

***<u>Ví dụ 19</u>*: Giải bất phương trình:**

$$3x.\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)\ge 0\quad\left(x\in\mathbb{R}\right).\qquad(1)$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Quan sát ta có thể thấy biểu thức $\sqrt{9x^2+3}$ có thể biểu diễn qua 3x bằng cách $\sqrt{9x^2+3}=\sqrt{\left(3x\right)^2+3}$, vậy thì với $\sqrt{1+x+x^2}$ sẽ biến đổi như thế nào?

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 3x.\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)\ge -(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2.3x+3x.\sqrt{\left(3x\right)^2+3}\ge 2(-2x-1)+(-2x-1)\left(\sqrt{(-2x-1)^2+3}\right)\qquad(2)$$

Xét hàm số $f(t)=2t+t.\sqrt{t^2+3}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình: $(2)\Leftrightarrow f\left(3x\right)\ge f\left(-2x-1\right)\Leftrightarrow 3x\ge -2x-1\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $\left[-\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

<u>Ví dụ 20</u>:

Giải bất phương trình: $4\left|2x-1\right|(x^2-x+1)>x^3-6x^2+15x-14\quad(1)$

Bài giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

Ta có BPT (1) $\Leftrightarrow\left|2x-1\right|\left[(2x-1)^2+3\right]>(x-2)^3+3x-6$

$$\Leftrightarrow |2x-1|^3+3|2x-1|>(x-2)^3+3(x-2) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+3t, \forall t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra *f(t)* là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình (*)$\Leftrightarrow f(|2x-1|)>f(x-2)\Leftrightarrow |2x-1|>x-2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\2x-1>x-2\end{cases}\\\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\2x-1<-x+2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x>-1\end{cases}\\\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{1}{2}\\x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Qua các ví dụ ở trên, chúng ta đã "thử sức" với các phương trình và bất phương trình đại số đưa được về giải quyết theo phương pháp hàm đặc trưng, thấy được hiệu quả của phương pháp này. Nhưng sẽ là không toàn diện nếu chúng ta bỏ qua việc khai thác tính chất này đối với hệ phương trình đại số nói riêng và hệ phương trình nói chung. Vậy, chúng ta cùng xem xét tiếp mục ba nhé.

3. Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải hệ phương trình đại số

Đối với những hệ phương trình sử dụng được phương pháp hàm đặc trưng để giải, ta sẽ thấy được sự đa dạng, phong phú khi kết hợp phương pháp này với các phương pháp khác.

Trước tiên, ta xét các hệ phương trình mà sau khi sử dụng hàm đặc trưng sẽ đưa về được các phương trình đơn giản hơn và sau đó dùng các phép biến đổi cơ bản như biến đổi tương đương, đưa về phương trình tích để giải.

<u>Ví dụ 1</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+x-2=y^3+3y^2+4y & (1)\\x^5+y^3+1=0 & (2)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>: Trong những năm trước đây, việc sử dụng hàm đặc trưng chưa là phương pháp thông dụng, phổ biến, do đó, học sinh phần nào sẽ gặp khó khăn trong biến đổi nếu như chưa được trang bị kiến thức để giải quyết các bài tập dạng này. Nhưng khi đã có phương pháp đưa về hàm đặc trưng thì có thể nói bài tập này không còn là trở ngại với các em nữa.*

Với hệ phương trình trên, chúng ta thấy từ phương trình (1), bằng phương pháp thêm bớt hoặc phân tích, dùng đồng nhất hệ số, ta sẽ tìm được biểu thức

liên hệ giữa biến x và y thông qua hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$. Và sau đó, thế vào phương (2), ta dễ dàng đưa được phương trình đã cho về tích hai nhân tử và giải quyết được bài toán.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^3+x=(y+1)^3+(y+1) \quad (1a)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1a)\Leftrightarrow f(x)=f(y+1)\Leftrightarrow x=y+1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay y = x - 1 vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$x^5+x^3-3x^2+3x=0\Leftrightarrow x\left(x^4+x^2-3x+3\right)=0\Leftrightarrow x\left[x^4+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\Leftrightarrow x=0$$

Vì $x^4+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Với x = 0 ta có y = - 1.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;-1)$.

Ta xét tiếp ví dụ sau, xem điều đáng phân tích ở đây là gì?

<u>Ví dụ 2</u>. (Đề thi Đại học khối A năm 2012)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y & (1)\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

✍ *<u>Nhận xét:</u>*

- Ta thấy ở phương trình (1), bậc cao nhất của hai ẩn x, y đều là bậc ba nên khả năng sử dụng tính đồng biến, nghịch biến là rất cao. Mặt khác, do hai vế đều có hạng tử bậc hai nên ta cần tìm những số thỏa mãn

$$m(px+u)^3+n(px+u)=m(qy+v)^3+n(qy+v) \quad (1')$$

Hệ số trước x^3, y^3 trong khai triển (1') là mp^3, mq^3

Hệ số trước x^3, y^3 trong khai triển (1) là 1. Do đó ta chọn m = 1, p = 1, q = 1.

Lúc đó (1') $\Leftrightarrow (x+u)^3+n(x+u)=(y+v)^3+n(y+v) \quad (2')$

Lập luận tương tự ta lại có hệ số của x^2 trong khai triển (2') là

$$\begin{cases}3u=-3\\3v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-1\\v=1\end{cases}$$

Lúc đó (2') $\Leftrightarrow (x-1)^3+n(x-1)=(y+1)^3+n(y+1) \quad (3')$

Lập luận tương tự ta lại có hệ số của x trong khai triển (3') là

$$\begin{cases} 3+n=-9 \\ 3+n=-9 \end{cases} \Leftrightarrow n=-12$$

Do đó $(3') \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1)$

(Sau khi phân tích được như trên, ta nên khiểm tra lại một lần nữa bằng cách khai triển ra xem có đúng là phương trình (1) hay không).

- Vấn đề gặp phải tiếp theo là khi phương trình (1) đã biến đổi để nhìn ra được hàm đặc trưng là $f(t) = t^3 - 12t$ thì hàm f(t) này là hàm không đơn điệu trên $\mathbb{R}$, do đó ta phải quan sát tiếp đến phương trình (2).

Ta thấy $(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Do đó ta có

$$\begin{cases} -1 \le x - \frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

Lúc này hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ sẽ nghịch biến trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (1a) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (2a) \end{cases}$$

Từ phương trình (2a) ta suy ra

$$\begin{cases} -1 \le x - \frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ với $t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12t < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ suy ra hàm số *f(t)* nghịch biến trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Thay y = x - 2 vào phương trình (2a) ta được phương trình:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=1\Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 3*. *(Đề thi Đại học khối A, A1 năm 2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

- Khi nhìn qua hệ phương trình, đa số học sinh sẽ nghĩ cố gắng giải phương trình thứ hai trước vì nghĩ rằng nó đơn giải, có thể đưa về phương trình tích bằng cách đặt nhân tử chung, hoặc đưa được về phương trình tích bằng cách coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x, nhưng khi bắt tay vào tính toán theo hướng này thì biệt thức denta lại không phải là số chính phương.

- Cũng có những học sinh nhìn ra việc biến đổi đưa phương trình thứ nhất về dạng hàm số f(u) = f(v) bằng việc thực hiện ngay phép biến đổi

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{y^4}$$

Đến đây, các em đã mắc sai lầm là chỉ được phép thay $y=\sqrt[4]{y^4}$ nếu $y\ge 0$ và thay $y=-\sqrt[4]{y^4}$ nếu y < 0. Như vậy phép biến đổi trên đã không xét đến dấu của y, và do đó là một phép biến đổi không được chấp nhận.

Nếu học sinh phát hiện ra vấn đề và điều chỉnh lại bằng cách xét hai trường hợp $y\ge 0$ và y < 0 thì các em lại gặp khó khăn trong trường hợp xử lí với y < 0

- Ở bài này, cái hay là việc khai thác hiệu quả phương trình thứ hai để dùng nó giải quyết cho phương trình thứ nhất.

Với những học sinh có kĩ năng và tâm lí làm bài tốt, các em sẽ giải quyết được bằng cách đặt ra câu hỏi, liệu phương trình thứ hai có giúp cho việc giải quyết trường hợp y < 0 hay không? Và khi đó, nếu để ý kĩ đến phương trình hai thì ta sẽ thấy nó đã được viết dưới dạng 2 số đầu của một tổng bình phương, và khi đó việc thêm bớt để đưa được về dạng tổng bình phương là hoàn toàn có khả năng thực hiện được. Và khi đó vấn đề vướng mắc sẽ được giải quyết triệt để.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge 1, y\in\mathbb{R}$ (*).

$(2)\Leftrightarrow x^2+2x(y-1)+(y-1)^2=4y\Leftrightarrow(x+y-1)^2=4y\Rightarrow y\ge 0.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{y^4}\quad(1a)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t}$ với $t\in[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}>0,\forall t>0$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên nửa đoạn $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1a)\Leftrightarrow f(x-1)=f(y^4)\Leftrightarrow x-1=y^4\Leftrightarrow x=y^4+1$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$(y^4+y)^2=4y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=1\quad (tmdk(*))\\ y(y^3+1)^2=4\quad (2a)\end{array}\right.$$

Giải phương trình (2a):

$$(2a)\Leftrightarrow y^7+2y^4+y-4=0\Leftrightarrow(y-1)(y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=2\,(tmdk(*))\\ y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4=0\quad (2b)\end{array}\right.$$

Phương trình (2b) vô nghiệm vì với $y\ge 0$ thì vế trái của (2b) luôn lớn hơn 0.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) = (1; 0), (2; 1).

<u>Ví dụ 4</u>. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm học 2012 - 2013)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x=\sqrt{(y-1)^3}-\sqrt{9(y-1)} & (1)\\ 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$ $(*)$.

Từ phương trình (2) suy ra $\sqrt{y-1}-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 2$

$(1)\Leftrightarrow x^3-3x=(\sqrt{y-1})^3-3.\sqrt{y-1}\quad (1a)$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ với $t\in[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3\ge 0,\forall t\ge 1$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Mặt phác *f(t)* là hàm liên tục trên nửa đoạn $[1;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1a)\Leftrightarrow f(x)=f(\sqrt{y-1})\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$

Với $x=\sqrt{y-1}$ thay vào (2) ta được phương trình:

$$1+\sqrt{x-1}=x\Leftrightarrow\sqrt{x-1}-(\sqrt{x-1})^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \sqrt{x-1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Với x = 1 ta có y = 2. (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với x = 2 ta có y = 5. (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) = (1; 2), (2; 5).

<u>Ví dụ 5</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x\sqrt{8x-4} - 12y^2 - 5 = 4y^3 + 13y + \sqrt{18x-9} & (1) \\ 4x^2 - 8x + 4\sqrt{2x-1} + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Sẽ biến đổi được phương trình (1) nhờ việc dựa vào hàm đặc trưng $f(t) = 4t^3 + t$. Khi đó, phương trình (2) được giải quyết dựa vào phương pháp đưa về phương trình tích.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}; y \in \mathbb{R} \quad (*)$.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 8x\sqrt{2x-1} = 4y^3 + 12y^2 + 13y + 5 + 3\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left[4(2x-1)+1\right]\sqrt{2x-1} = 4(y+1)^3 + (y+1)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3 + \sqrt{2x-1} = 4(y+1)^3 + (y+1) \quad (1a)$$

Xét hàm số: $f(t) = 4t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$$(1a) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-1}\right) = f(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = y+1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 & (**) \\ 2x = y^2 + 2y + 2 & (1b) \end{cases}$$

Thay (1b) vào (2):

$$(y^2 + 2y + 2)^2 - 4(y^2 + 2y + 2) + 4(y+1) + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 6y^3 + 11y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y\left(y^3 + 6y^2 + 11y + 6\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y+1)\left(y^2 + 5y + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \\ y = -2 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (**) ta được y = 0; y = -1.

Với y = 0 ta có $\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với y = -1 ta có $\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (1;0), \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

<u>Ví dụ 6.</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} & (1) \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Ở ví dụ này, nếu xét độc lập từng phương trình thì việc dẫn đến hàm đặc trưng sẽ gặp khó khăn. Vì vậy ta sẽ phải trừ vế với vế của hai phương trình, khi đó ta sẽ thấy xuất hiện được hàm đặc trưng.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$.

Trừ vế với vế tương ứng của hai phương trình ta được phương trình:

$$x^2+x\sqrt{x^2+1}-1=y^2+2y+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1} \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t.\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+t.\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{2t.\sqrt{t^2+1}+2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)^2}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0, \forall t\in\mathbb{R}$$

suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy ta có $(1a)\Leftrightarrow f(x)=f(y+1)\Leftrightarrow x=y+1\Leftrightarrow y=x-1$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2-2x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Với x = - 1 ta có y = -2.

Với $x=\frac{5}{3}$ ta có $y=\frac{2}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;-2),\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$.

<u>Ví dụ 7</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^6-y^3+x^2-9y^2-30=28y & (1) \\ \sqrt{2x+3}+x=y & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Việc đưa phương trình (1) về dạng áp dụng được hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ sẽ là không còn khó khăn nữa, khi đó ta đưa được về phương trình $x^2=y+3$ và từ phương trình (1) ta sẽ chỉ ra được $y+3\geq 0$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\geq -\frac{3}{2}; y\in\mathbb{R} \quad (*)$.

Từ phương trình (1) ta có

$$x^6+x^2=y^3+9y^2+28y+30 \Leftrightarrow x^2\left(x^4+1\right)=\left(y+3\right)\left[(y+3)^2+1\right] \Rightarrow y+3\ge 0$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t\left(t^2+1\right)=t^3+t$ với $t\in\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=f(y+3)\Leftrightarrow x^2=y+3 \quad \left(1a\right)$

Thay vào (2): $\sqrt{2x+3}=x^2-x-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3\ge 0 \\ 2x+3=x^4-2x^3-6x^2+6x+x^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3\ge 0 \\ x^4-2x^3-5x^2+4x+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3\ge 0 \\ \left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x^2-2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Với x = 3 thay vào (1a) ta được y = 6 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với $x=-\sqrt{2}$ thay vào (1a) ta được y = - 1 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;6\right),\left(-\sqrt{2};-1\right)$.

Ta thấy, để tìm được ra các hàm đặc trưng áp dụng giải quyết cho các phương trình không phải là đơn giản, nó đòi hỏi kĩ năng, kinh nghiệm, sự tinh ý, sự kết hợp khéo léo của người làm toán, nhưng sau khi đã giải quyết được vấn đề này, thì một vấn đề đặt ra tiếp theo là việc giải quyết tiếp các phương trình sau đó như thế nào? Chúng ta xét tiếp các ví dụ sau, xem xem câu trả lời là gì nhé?

***Ví dụ 8**. (Đề thi Đại học khối A năm 2010)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0 & (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

✍ *Nhận xét:*

Qua các ví dụ đã xét ở mục giải phương trình, bất phương trình ta sẽ thấy được là phải nhân hai vế của phương trình (1) với 2, sau đó đưa được phương trình (1) về dạng hàm đặc trưng với hàm đặc trưng là hàm $f\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Sau khi rút được y từ phương trình (1) và thế vào phương trình (2), ta được một phương trình ẩn x, và sau đó tiếp tục phải áp dụng tính chất của hàm số ta sẽ tìm được nghiệm của hệ phương trình.

Bài giải tham khảo

Điều kiện $\begin{cases} x\le \dfrac{3}{4} \\ y\le \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad (*)$

Ta có $\left(1\right)\Leftrightarrow\left(2x\right)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y} \quad \left(1a\right)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.
Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do đó phương trình

$$(1a)\Leftrightarrow f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$$

Thế vào phương trình (2) ta được: $4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\ \ (2a)$

Nhận thấy x = 0 và x = $\frac{3}{4}$ không phải là nghiệm của (2a).

Xét hàm $g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7,$ trên khoảng $\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

$$g'(x)=8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0,\forall x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$$

suy ra hàm *g(x)* nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

Mặt khác $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$, do đó phương trình (2a) có nghiệm duy nhất x = $\frac{1}{2}$, suy ra y = 2 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Đến đây, người đọc đã biết được phương pháp mà tôi muốn nói đến khi kết hợp với phương pháp hàm đặc trưng. Đó chính là sự kết hợp lại một lần nữa phương pháp hàm số, sử dụng tiếp tính đơn điệu của hàm số cho các phương trình, bất phương trình. Có thể nói phương pháp này được sử dụng khá nhiều và khá hiệu quả. Chúng ta xét tiếp các ví dụ sau.

***Ví dụ 9**. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm học 2013 - 2014)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} & (1)\\ x^3(9y^2+1)+4(x^2+1)\sqrt{x}=10 & (2)\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x\geq 0; y\in\mathbb{R}$ (*).
Nhận xét x = 0 không thỏa mãn hệ phương trình.
Xét x > 0

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{9y^2+1}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}$

$$\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{(3y)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1}\quad (1a)$$

Từ (1) và x > 0 ta có y > 0. Xét hàm số $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ với $t\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* luôn đồng biến trên khoảng (0,+∞).

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình (1a) $\Leftrightarrow f(3y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow 3y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Thế vào phương trình (2) ta được:

$x^3+x^2+4(x^2+1).\sqrt{x}=10\Leftrightarrow x^3+x^2+4(x^2+1).\sqrt{x}-10=0$

Đặt $g(x)=x^3+x^2+4(x^2+1).\sqrt{x}-10$, với $x\in(0;+\infty)$

Ta có $g'(x)=3x^2+2x+4\left[2x\sqrt{x}+(x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]>0,\forall x\in(0;+\infty)$

suy ra hàm số *g(x)* là hàm số đồng biến trên khoảng (0,+∞).

Mặt phác *g(x)* là hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có g(1) = 0.

Vậy phương trình g(x) = 0 có nghiệm duy nhất x = 1 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với $x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất: (x; y) = $(1;\dfrac{1}{3})$.

<u>Ví dụ 10</u>. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2012 - 2013)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1)\\ 2\sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{4+x} & (2)\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $-4\le x\le 1,\ y\in\mathbb{R}$ (*).

Ta có

$(1)\Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}\qquad (1a)$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$

Thế vào (2) ta được phương trình:

$\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{4+x} \Leftrightarrow \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{4+x} = 4 \quad (2a)$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{4+x}$ liên tục trên $[-4;1]$, ta có

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{4+x}} < 0, \forall x \in (-4;1)$$

suy ra hàm số g(x) nghịch biến trên $(-4;1)$.

Mặt khác ta có g(-3) = 4.

Do đó phương trình $(2a) \Leftrightarrow g(x) = g(-3) \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (-3;2)$.

***Ví dụ 11*.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right) + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} = 6 & (1) \\ x^2y\left(2 + 2\sqrt{4y^2+1}\right) = x + \sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

ĐK: $x \geq 0; y \in \mathbb{R}$ (*).

Nhận thấy (0; y) không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x > 0$.

Từ phương trình (2) ta có $2y + 2y\sqrt{4y^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$ (2a)

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(2a) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}$.

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình:

$x^3 + x + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x^3 + x + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} - 6 = 0$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + x + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} - 6$ với $x \in (0;+\infty)$, ta có *g(x)* là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + 4x\sqrt{x} > 0$ với $x \in (0;+\infty)$ suy ra hàm số *g(x)* đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mặt khác $g(1) = 0$.

Do đó phương trình g(x) = 0 $\Leftrightarrow g\left(x\right)=g\left(1\right)\Leftrightarrow x=1$

Với x = 1 ta có $y=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

<u>Ví dụ 12</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\left(4x^2+1\right)-y\sqrt{2y-1}=0 & (1) \\ -2x^2+xy+3x-\sqrt{\dfrac{x}{2}+2}=0 & (2) \end{cases} \quad \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Bài giải tham khảo

ĐK: $x\ge -4; y\ge \dfrac{1}{2} \quad (*)$.

Ta có

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2x\left(4x^2+1\right)-2y\sqrt{2y-1}=0\Leftrightarrow \left(2x\right)^3+\left(2x\right)=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+\sqrt{2y-1} \quad (1a)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=2t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$\left(1a\right)\Leftrightarrow f\left(2x\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 & (**) \\ 4x^2+1=2y \end{cases}$

Thay vào phương trình (2) ta được phương trình:

$-2x^2+xy+3x-\sqrt{\dfrac{x}{2}+2}=0\Leftrightarrow -4x^2+x\left(2y\right)+6x-\sqrt{2x+8}=0$

$\Leftrightarrow -4x^2+x\left(4x^2+1\right)+6x-\sqrt{2x+8}=0\Leftrightarrow 4x^3-4x^2+7x-\sqrt{2x+8}=0$

Xét hàm số $g\left(x\right)=4x^3-4x^2+7x-\sqrt{2x+8}$ với $x\in\left[0;+\infty\right)$, ta có *g(x)* là hàm liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

$$g'\left(x\right)=12x^2-8x+7-\frac{1}{\sqrt{2x+8}}=4x^2+2\left(2x-1\right)^2+\frac{5\sqrt{2x+8}-1}{\sqrt{2x+8}}>0, \forall x\ge 0$$

nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Mặt khác dễ thấy $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. Do đó phương trình g(x) = 0 có nghiệm duy nhất

x = $\dfrac{1}{2}$.

Với $x = \frac{1}{2}$ ta có y = 1 (thỏa mãn điều kiện (*) và (**)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

***Ví dụ 13*.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=x-y & (1) \\ x^2-12xy+9y^2+4=0 & (2) \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

✍ *Nhận xét:*

Rõ ràng, từ phương trình (1), ta thấy ngay được phương trình đặc trưng $f(t)=\sqrt{2t+1}-t$, nhưng khi đó ta lại gặp trở ngại là hàm số không luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định đã chỉ ra. Vậy ta phải làm gì?

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ y\ge -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$.

Từ phương trình (2) nếu hệ phương trình có nghiệm (x; y) thì $x.y\ge 0$ (**)

Ta có $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-x=\sqrt{2y+1}-y$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+1}-t$ với $t\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$, *f(t)* là hàm liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}-1=\frac{1-\sqrt{2t+1}}{\sqrt{2t+1}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗		↘	

Do (**) nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x,y\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$: $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Trường hợp 2: $x,y\in(0;+\infty)$: $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Do đó phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay x = y vào phương trình (2) ta được phương trình: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
Kết hợp điều kiện (*) ta được $x = y = \sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = \left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Qua các ví dụ trên, ta thấy chúng có một điểm chung là đều từ một phương trình, phát hiện ra việc khai thác tính chất hàm đặc trưng, đưa phương trình đó về một phương trình đơn giản hơn, sau đó dùng phương pháp thế, kết hợp với phương trình còn lại, ta sẽ giải quyết được bài toán. Vậy câu hỏi đặt ra là có trường hợp ngược lại hay không? Ta xét tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{y-1} + 3y & (1) \\ (x+y)(2x-y) + 4 = -6x - 3y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Ở ví dụ này, ta chưa nhìn ra hàm đặc trưng ngay cho cả hai phương trình, nhưng nếu tinh ý, ta sẽ thấy phương trình (2) có thể đưa được về phương trình tích bằng cách coi phương trình (2) là phương trình bậc hai ẩn y (hoặc x), và sau đó ta mới xét tiếp đến phương trình (1).

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{3}; y \ge 1$ (*).

$(2) \Leftrightarrow y^2 - (x+3)y - \left(2x^2 + 6x + 4\right) = 0; \quad \Delta = (3x+5)^2$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y + x + 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array}\right.$

$y + x + 1 = 0$ vô nghiệm vì $x \ge \frac{1}{3}; y \ge 1$

$2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$, thay vào phương trình (1) ta có:

$\sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{2x+3} + 3(2x+4)$

$\Leftrightarrow 2(3x-1) + \sqrt{3x-1} = 2(2x+3) + \sqrt{2x+3} \quad (1a)$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$ với $t \in [0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 4t + 1 > 0, \forall t \in [0;+\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 12$. (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (4;12)$.

Chú ý: Phương trình

$\sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{2x+3} + 3(2x+4) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x+3} = 8 - 2x$ cũng có thể giải bằng phương pháp nhân vưới biểu thức liên hợp.

Tương tự, ta xét tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + x^2y^2 = y^3 + x^2y - x^2 & (1) \\ -10x^3 - 5x + 12y - 11 = 2x^2\sqrt[3]{7x^3 - 7y + 2x + 7} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

- Từ phương trình (1) ta sẽ biến đổi được về phương trình tích.

- Sau khi đưa được phương trình (1) về dạng tích và kết hợp với phương trình (2) thì việc chỉ ra được hàm đặc trưng ở phương trình này không hề đơn giản. Ta phải biến đổi được phương trình đó theo ẩn $t = \dfrac{1}{x}$, và sau đó mới biến đổi tiếp được.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + 1 - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + 1 - y = 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Thế vào phương trình (2) trong hệ không thoả mãn.

Trường hợp 2: $y = x^2 + 1$ thế vào phương trình (2) trong hệ ta được

$-10x^3 + 12x^2 - 5x + 1 = 2x^2.\sqrt[3]{7x^3 - 7x^2 + 2x} \quad (3)$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (3) nên chia cả hai vế của (3) cho x^3 ta được phương trình

$$-10 + \frac{12}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 2.\sqrt[3]{7 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \quad (3')$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, phương trình (3) trở thành: $t^3 - 5t^2 + 12t - 10 = 2.\sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7} \quad (4)$

Đặt a = $\sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7}$ ta có hệ sau $\begin{cases} t^3 - 5t^2 + 12t - 10 = 2.a & (5) \\ 2t^2 - 7t + 7 = a^3 & (6) \end{cases}$

Cộng vế với vế của (5) và (6) ta đưa về $(t - 1)^3 + 2(t - 1) = a^3 + 2a \quad (7)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(7) \Leftrightarrow f(t - 1) = f(a) \Leftrightarrow t - 1 = a$

Thay a = t - 1 ta được phương trình

$\sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7} = t - 1 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 7 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 \Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 10t - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 - 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (Vì $t^2 - 3t + 4 = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$).

Với t = 2 ta có $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{5}{4}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Sau đây ta xét các ví dụ kết hợp giữa phương pháp hàm đặc trưng và phương pháp nhân liên hợp.

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x-7y) = -12 & (1) \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét: Trong hai phương trình đã cho, ta dễ dàng đưa được phương trình (1) về dạng xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + 2t$. Khi đó thay y theo x vào phương trình hai ta được một phương trình vô tỉ, và với phương trình vô tỉ này, dễ thấy x = 2 là một nghiệm, do đó sẽ tìm ra cách giải là sử dụng phương pháp nhân liên hợp bằng cách thêm bớt một hằng số thích hợp.*

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 3 \\ y \ge 3 \end{cases}$ (*).

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x = (y-2)^3 + 2(y-2) \quad (1a)$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 2 \quad (1b)$

Thay (1b) vào (2):

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = x^2 + (x+2)^2 - 10x - 5(x+2) + 22$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2x^2 - 11x + 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (2x-7)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - 2 = 0 & (2a) \\ -\frac{1}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = (2x-7) & (2b) \end{array}\right.$$

$(2a) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

$$(2b) \Leftrightarrow (7-2x) - \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = 0$$

Vì $x \le 3$ nên $7 - 2x \ge 1$ và $\frac{1}{\sqrt{3-x}+1} < 1$

Từ đó $\left[(7-2x) - \frac{1}{\sqrt{3-x}+1}\right] + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$. Hay (2b) vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ \sqrt{y - xy + 9} + 2013 = \sqrt{y^2 + 2y + 4} + 2014x & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} y - xy + 9 \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \end{cases}$ (*).

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}$ (Vì $y + \sqrt{y^2 + 1} \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1} \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \dfrac{\sqrt{t^2} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \dfrac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x+1) = f(-y) \Leftrightarrow x + 1 = -y \Leftrightarrow y = -x - 1$

Thay $y = -x - 1$ vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 3} = 2014x - 2013 \quad (2a)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có

$$x^2 + 8 > x^2 + 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} > \sqrt{x^2 + 3} > 0 \Rightarrow 2014x - 2013 > 0 \Rightarrow x > 0$$

Do đó $(2a) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 8} - 3\right) - \left(\sqrt{x^2 + 3} - 2\right) - 2014(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 8} + 3} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} - 2014\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì ta có

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} - 2014 = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+8} - 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} - 2014 < 0, \forall x > 0$$

Với x = 1 ta có y = - 2 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (1 ; - 2).

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (17 - 3x)\sqrt{5 - x} + (3y - 14)\sqrt{4 - y} = 0 & (1) \\ 2\sqrt{2x + y + 5} + 3\sqrt{3x + 2y + 11} = x^2 + 6x + 13 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Để giải được bài tập này, ta thấy ngoài phương pháp sử dụng hàm đặc trưng, sử dụng cả hàm số ta còn phải kết hợp cả phương pháp nhân liên hợp.

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 5 \\ y \le 4 \\ 2x + y + 5 \ge 0 \\ 3x + 2y + 11 \ge 0 \end{cases} \quad (*)$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left[3(5-x)+2\right]\sqrt{5-x} = \left[3(4-y)+2\right]\sqrt{4-y} \quad (1a)$

Xét hàm số $f(t) = (3t^2+2)t = 3t^3 + 2t$ với $t \in [0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in [0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình

$(1a) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{5-x}\right) = f\left(\sqrt{4-y}\right) \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow 5 - x = 4 - y \Leftrightarrow y = x - 1$

Thay y = x - 1 vào (2) ta được phương trình:

$2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13 \quad (2a)$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x+4} - 2\right) + 3\left(\sqrt{5x+9} - 3\right) = x^2 + 6x$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x}{\sqrt{3x+4}+2} + \dfrac{15x}{\sqrt{5x+9}+3} = x(x+6)$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+2} + \dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+3} - 6 - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+2} + \dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+3} - 6 - x = 0 \quad (2b) \end{array}\right.$

Với x = 0 ta có y = -1 (Thỏa mãn điều kiện (*)).

Giải phương trình (2b): Xét hàm số $g(x) = \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+2} + \dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+3} - 6 - x$

liên tục trên $\left[-\dfrac{4}{3};5\right]$, ta có

$g'(x) = -\dfrac{9}{\sqrt{3x+4}\left(\sqrt{3x+4}+2\right)^2} - \dfrac{75}{\sqrt{5x+9}\left(\sqrt{5x+9}+2\right)^2} - 1 < 0, \forall x \in \left(-\dfrac{4}{3};5\right)$

suy ra hàm số g(x) nghịch biến trên $\left[-\dfrac{4}{3};5\right]$.

Mặt khác ta có g(-1) = 0.

Do đó phương trình $(2b) \Leftrightarrow g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;-1),(-1;-2)$.

Nhận xét:

- Khi gặp phương trình vô tỉ, một trong các phương pháp hay được nhắc đến đó là phương pháp nhân liên hợp. Ta thường tìm ra biểu thức liên hợp dựa vào việc nhẩm nghiệm của phương trình, thường những nghiệm đó là nghiệm duy nhất. Và vì thế, khi xác định lượng liên hợp của biểu thức vô tỉ tương đối đơn giản, ví dụ như ở phương trình trên, ta chỉ cần phát hiện ra x = 0 là một nghiệm của phương trình (2a) thì khi gặp $\sqrt{3x+4}$ *thì ta sẽ thêm bớt một hằng số để xuất hiện dạng* $\sqrt{3x+4}-2$, *khi gặp* $\sqrt{5x+9}$ *ta cũng chỉ cần thêm bớt một hằng số để xuất hiện dạng* $\sqrt{5x+9}-3$, *khi đó sau khi nhân và chia với lượng liên hợp thì sẽ xuất hiện nhân tử chung là x.*

- Đối với phương trình (2a), học sinh cũng có thể giải tiếp bằng phương pháp nhân với biểu thức liên hợp. Đầu tiên dùng hỗ trợ của máy tính, có thể tìm được nghiệm x = -1 của phương trình (2a), và vì vậy, theo hướng phân tích ở trên, ta sẽ tách tiếp được như sau:

$$\frac{6}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-6-x=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{6}{\sqrt{3x+4}+2}-2\right)+\left(\frac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-3\right)=(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(1-\sqrt{3x+4}\right)}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{3\left(2-\sqrt{5x+9}\right)}{\sqrt{5x+9}+3}=x+1$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(-3x-3)}{\left(\sqrt{3x+4}+2\right)\left(1+\sqrt{3x+4}\right)}+\frac{3(-5-5x)}{\left(\sqrt{5x+9}+3\right)\left(2+\sqrt{5x+9}\right)}=x+1$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[-\frac{6}{\left(\sqrt{3x+4}+2\right)\left(1+\sqrt{3x+4}\right)}-\frac{15}{\left(\sqrt{5x+9}+3\right)\left(2+\sqrt{5x+9}\right)}-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

(vì $-\frac{6}{\left(\sqrt{3x+4}+2\right)\left(1+\sqrt{3x+4}\right)}-\frac{15}{\left(\sqrt{5x+9}+3\right)\left(2+\sqrt{5x+9}\right)}-1<0,\forall x\in\left(-\frac{4}{3};5\right)$)

- Như vậy theo cách giải trên, trong trường hợp nếu nhẩm thấy phương trình có hai nghiệm thì ta đã dùng phương pháp liên hợp hai lần để xuất hiện nhân tử chung. Vậy ngoài cách thêm bớt hai lần như vậy, ta có cách nào để chỉ cần một lần thêm bớt là đã xuất hiện được nhân tử chung hay không?Khi đó cách làm xuất hiện biểu thức liên hợp thế nào? Ta xét tiếp ví dụ sau.

<u>Ví dụ 19</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3-x^3+3\left(3y^2-x^2\right)+32y=8x-36 & (1)\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 & (2)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *<u>Nhận xét</u>:*

Ở ví dụ này ta cần chú ý ở cả hai phương trình đã cho.
- Thứ nhất, đối với phương trình (1), ta thấy bậc cao nhất của x và y đều là 3, vậy thì nhiều khả năng sẽ đưa được về hàm đặc trưng. Vậy thì trước hết ta để ý, do các x và y độ lập với nhau, nên việc đầu tiên là ta biến đổi phương trình đã cho về dạng $(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 8x = y^3 + 9y^3 + 32y + 36 \quad (1')$.
Ở vế trái của (1') ta lại để ý tiếp có thể đưa được về $x^3 + 3x^2 + 3x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x - 1 = (x+1)^3 + 5(x+1) - 6$
Vậy thì lúc này vế phải sẽ nghĩ đến việc biểu diễn qua $(py+u)^3 + 5.(py+u)$
Và khi đó sẽ xuất hiện được hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + 5t$.
- Thứ hai, sau khi thế y từ phương trình (1) vào phương trình (2), ta nhận thấy đây là một phương trình vô tỉ. Đối với một phương trình vô tỉ, phương pháp hay dùng nhất đó là nhân với lượng liên hợp, tuy nhiên để tìm ra được lượng liên hợp cũng đòi hỏi một chút kĩ thuật. Đối với bài này, nhẩm hoặc dùng máy tính cầm tay ta thấy phương trình có nghiệm là x = - 1 và x = 2.
Đối với phương trình có hai nghiệm trở lên thì cách thêm bớt hằng số vào mối căn và liên hợp là không phù hợp. Ở đây ta không thêm bớt hằng số mà phải thêm một biểu thức ax + b nào đó. Vậy tìm biểu thức này như thế nào?
Trước hết ta xét $\sqrt{x+2}$ *nhé*
Với x = - 1 thay vào căn có giá trị bằng 1, thay vào biểu thức thêm ta có
- a + b = 1.
Với x = 2 thay vào căn có giá trị bằng 2, thay vào biểu thức thêm ta có
2a + b = 2.

Giải hệ $\begin{cases} -a+b=1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Do đó biểu thức cần thêm vào đó là: $ax + b = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

Tương tự xét $\sqrt{22-3x}$, *biểu thức cần thêm vào đó là:* $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{14}{3}$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -2 \\ y \le \dfrac{16}{3} \end{cases}$ (*).

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 8x = y^3 + 9y^2 + 32y + 36$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) = (y+3)^3 + 5(y+3) \quad (1a)$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 5t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y+3) \Leftrightarrow x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = x-2$

Thay y = x - 2 vào phương trình (2) ta được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+2}-\frac{x+4}{3}\right)+\left(\sqrt{22-3x}-\frac{14-x}{3}\right)=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\frac{9(x+2)-x^2-8x-16}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}\right]+\left[\frac{9(22-3x)-x^2+28x-196}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}\right]=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left[1+\frac{4}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

(Vì ta có $1+\frac{4}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}>0, \forall x \in \left[-2;\frac{22}{3}\right]$).

Với x = -1 ta có y = - 3. (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với x = 2 ta có y = 0. (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;-3),(2;0)$.

Chú ý: Đối với phương trình ở trên, ta cũng có thể nhân thêm với biểu thức liên hợp hai lần để làm xuất hiện hai nghiệm x = -1 và x = 2, nhưng vì đã trình bày cách này ở ví dụ 18 rồi nên ở đây tôi không trình bày thêm cách giải này nữa.

Ngoài phương pháp hàm số, phương pháp nhân liên hợp, thì phương pháp lượng giác hóa cũng là một phương pháp tỏ ra rất hiệu quả trong nhiều bài tập. Sau đây ta tiếp tục thấy được việc kết hợp giữa phương pháp dùng hàm đặc trưng và phương pháp lượng giác hóa qua ví dụ sau.

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1) \\ 2x^2+2xy\sqrt{1+x}=y+1 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Sẽ biến đổi được phương trình (1) nhờ việc dựa vào hàm đặc trưng $f(t)=2t^3+t$. *Khi đó, phương trình (2) có dạng* $2x^2+2x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}+1$, *với phương trình này, ta sẽ dùng phương pháp lượng giác hóa để giải quyết.*

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ (*).

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2y^3+y=\left[2(1-x)+1\right]\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}$ (3)

Xét hàm số: $f\left(t\right)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $\left(3\right)\Leftrightarrow f\left(y\right)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\quad\left(4\right)$

Thay (4) vào (2): $2x^2+2x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}+1\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$

Đặt $x=\cos t, t\in\left[0;\pi\right]$, phương trình (2) trở thành:

$$2\cos t^2-1+2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\cos t}\Leftrightarrow\cos 2t+2\cos t\sin t=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos 2t+\sin 2t=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{t}{2}+k2\pi\\2t+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\dfrac{t}{2}+k'2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{4\pi}{3}\\t=\dfrac{3\pi}{10}+k'\dfrac{4\pi}{3}\end{array}\right.\left(k,k'\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết hợp điều kiện $t\in\left[0;\pi\right]$ ta được $t=\dfrac{3\pi}{10}$ thỏa mãn.

Khi đó $x=\cos\dfrac{3\pi}{10}$ và $y=\sqrt{1-\cos\dfrac{3\pi}{10}}=\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{20}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x,y\right)=\left(\cos\dfrac{3\pi}{10};\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{20}\right)$.

Ở ví dụ trên ta thấy, từ điều kiện của ẩn ta có thể tư duy đến việc dùng phương pháp lượng giác hóa, tuy nhiên với ví dụ sau thì sao? Thường thì ngay từ điều kiện của ẩn, ta có thể định hình được bài toán đã cho có thể giải quyết được nhờ phương pháp lượng giác hóa hay không, nhưng cũng có những bài đòi hỏi phải biết chia trường hợp, như ví dụ sau chẳng hạn.

***Ví dụ 21*.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-3x=\sqrt{y+3} & (1)\\x^3+2y^2+7\left(2x-y\right)=y^3+5\left(x^2+2\right) & (2)\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y\geq-3\end{cases}\quad\left(*\right)$.

$\left(2\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3-2\left(x-1\right)^2+7\left(x-1\right)=y^3-2y^2+7y\quad\left(2a\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-2t^2+7t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=3t^2-4t+7=3\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{17}{3}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình

$(2a) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y) \Leftrightarrow y = x-1$

Thế vào phương trình (1) ta được: $x^3 - 3x = \sqrt{x+2} \quad (1a)$

Giải phương trình (1a):

Nếu x > 2 thì $x^3 - 3x = x + x(x^2-4) > x > \sqrt{x+2}$ nên phương trình (1a) không có nghiệm với x > 2.

Nếu $-2 \le x \le 2$ thì đặt x = 2cost, với $t \in [0; \pi]$.

Khi đó phương trình (1a) trở thành:

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2} \Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = \sqrt{2(\cos t + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3t = \sqrt{2.2\cos^2\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\dfrac{t}{2} + m2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\dfrac{4\pi}{5} \\ t = m\dfrac{4\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in [0; \pi]$ nên ta được các giá trị t thỏa mãn là: $t = 0; t = \dfrac{4\pi}{7}; t = \dfrac{4\pi}{5}$

Với t = 0 ta có x = 2 $\Rightarrow$ y = 1.

Với $t = \dfrac{4\pi}{7}$ ta có $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{7} \Rightarrow y = 2\cos\dfrac{4\pi}{7} - 1$.

Với $t = \dfrac{4\pi}{5}$ ta có $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{5} \Rightarrow y = 2\cos\dfrac{4\pi}{5} - 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x;y) = (2;1), \left(2\cos\frac{4\pi}{7}; 2\cos\frac{4\pi}{7} - 1\right), \left(2\cos\frac{4\pi}{5}; 2\cos\frac{4\pi}{5} - 1\right).$$

Ta xét tiếp một ví dụ sử dụng sự kết hợp giữa hàm đặc trưng và phương pháp đánh giá.

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x^2 + 15x + 3y - 14 \quad (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

✍ *Nhận xét:*

Với hệ phương trình này, ta sử dụng được hàm đặc trưng đối với phương trình (1), còn phương trình (2) sẽ là phương pháp gì đây nhỉ?

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0$ (*).

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow (2-x)^3 + 3(2-x) = y^3 + 3y \quad (3)$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

ta có *f(t)* là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(3) \Leftrightarrow f(2-x) = f(y) \Leftrightarrow 2-x = y \quad (4)$

Thay (4) vào (2): $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = 4 \quad (5)$

Điều kiện: $0 \le x \le 2$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{x} \le \frac{1+x}{2}; \sqrt{2-x} \le \frac{1+(2-x)}{x}; \sqrt[4]{x} \le \frac{1+1+1+x}{4}; \sqrt[4]{2-x} \le \frac{1+1+1+(2-x)}{4}$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \le \frac{1+x}{2} + \frac{3-x}{2} + \frac{3+x}{4} + \frac{5-x}{4} = 4$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 1.

Do đó phương trình (5) có nghiệm duy nhất x = 1 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với x = 1 thay vào (4) ta có y = 1 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x; y) = (1; 1).

Như vậy, qua các ví dụ trên, ta thấy được sự phong phú của sự khai thác tính chất hàm đặc trưng vào giải hệ phương trình. Tuy nhiên sẽ là không hoàn thiện nếu ta thiếu đi sự kết hợp giữa các biến trong hệ. Cụ thể, ở các ví dụ trên chúng ta thấy việc tìm ra hàm đặc trưng chỉ dựa vào sự độc lập giữa hai biến x và y trong phương trình. Các ví dụ sau sẽ cho chúng ta thấy rõ hơn việc đi tìm hàm đặc trưng trong mối quan hệ giữa x và y.

Ví dụ 23. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y - 2x^2 - xy + 5y - 2 = 0 & (1) \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge y \\ y \ge 0 \end{cases}$ (*).

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} - \sqrt{y} - y^2 = \sqrt{(x-y)^2+1} - \sqrt{x-y} - (x-y)^2 \quad (2a)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{t} - t^2,\ \forall t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = t\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} < 0,\ \forall t > 0$ suy ra hàm số *f(t)* nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $(0; +\infty)$.

Do đó phương trình $(2a) \Leftrightarrow f(y) = f(x-y) \Leftrightarrow x = 2y$

Thay x = 2y vào phương trình (1) ta có

$$4y^3-10y^2+5y-2=0\Leftrightarrow (y-2)(4y^2-2y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ 4y^2-2y+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=2 \text{ (Vì } 4y^2-2y+1=\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}\text{).}$$

Với y = 2 ta có x = 4 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (4; 2).

***Ví dụ 24*.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=3\sqrt{y^2+9}+3y & (1) \\ (3x-1)\sqrt{x^2y+xy-5}-4x^3+3x^3y-7x=0 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Bài giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x^2y+xy\ge 5 \\ x\in\mathbb{R};\, y\in\mathbb{R} \end{cases}$ (*).

Xét phương trình (1):

$$3\sqrt{y^2+9}+3y>3|y|+3y\ge 0,\forall y;\quad y^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ge 0,\forall x;y\Rightarrow x>0$$

Mà $x^2y+xy\ge 5\Leftrightarrow y(x^2+x)\ge 5\Rightarrow y>0$

Khi đó ta có: $(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+1}+x=\frac{3}{y}\sqrt{1+\left(\frac{3}{y}\right)^2}+\frac{3}{y}$ $\quad (1a)$

Xét hàm số: $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác *f(t)* là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1a)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{3}{y}\right)\Leftrightarrow x=\frac{3}{y}\Leftrightarrow y=\frac{3}{x}$

Thay $y=\frac{3}{x}$ vào phương trình (2) ta có

$$(3x-1)\sqrt{3x-2}-4x^3+9x^2-7x=0\Leftrightarrow (3x-1)\left(\sqrt{3x-2}-x\right)=4x^3-12x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{3x-2}+x}=4x^3-12x^2+8x\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left(4x+\frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ (Vì } 4x+\frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x}>0,\forall x\ge\frac{2}{3}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Với x = 1 ta có y = 3 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với x = 2 ta có $y=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) = (1; 3), $\left(2;\frac{3}{2}\right)$.

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải các phương trình sau trên tập số thực

a) $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$.

b) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$.

c) $4x^3+18x^2+27x+14>\sqrt[3]{4x+5}$.

d) $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$.

e) $x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2=\sqrt[3]{81x-8}$.

f) $\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2x+2}}=x-1$.

g) $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}x^2-y-1=2\sqrt{2x-1}\\ y^3-8x^3+3y^2+4y-2x+2=0\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

b) $\begin{cases}x+\frac{2}{y}=y+\frac{2}{x}\\ \sqrt{x+8}-\sqrt{2y+2}=\sqrt{3y-2}\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

c) $\begin{cases}2\left(y^3-x^3\right)=6x^2+7x-y+3\\ 2\sqrt{3-y}+\sqrt{2(1+y)}=\sqrt{\frac{9}{4}x^2+4}\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

d) $\begin{cases}7x^3-y^3-24x^2+25x-3xy(x+y)-y-10=0\\ 7x^2+4xy-10x+y^2-2y+3=0\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

e) $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Phần 3
KẾT LUẬN

Đề tài được thực hiện từ năm học 2010 - 2011 đến nay, qua quá trình giảng dạy nâng cao cho học sinh, tôi nhận thấy học sinh rất hứng khởi khi được làm quen với việc giải quyết bài toán bằng cách tiếp cận thông qua sử dụng tính chất của hàm đặc trưng.

Đa số các em nắm được cách làm và khoảng 70% học sinh khá giỏi giải quyết tốt các bài toán giáo viên đưa ra. Phần bài tập này nằm trong các câu hỏi để đạt được điểm cao trong các đề thi đại học nên các em rất hứng thú, đặc biệt là các em học sinh giỏi toán.

Hướng phát triển thêm của đề tài là: Tiếp tục bổ sung khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình và bất phương trình, hệ phương trình khác ví dụ như đối với các hàm số mũ, logarit... bên cạnh đó cũng phát triển tiếp đối với các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình chứa tham biến.

Thông qua sáng kiến kinh nghiệm này, tôi mong muốn được đóng góp một phần nhỏ bé công sức trong việc hướng dẫn học sinh ứng dụng và khai thác các phương pháp khi làm toán, rèn luyện tính tích cực, phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh, gây hứng thú cho các em khi học toán. Tuy nhiên, do thời gian có hạn, trình độ bản thân còn hạn chế, nên tôi rất mong được sự đóng góp bổ sung của Hội đồng khoa học các cấp và của các bạn đồng nghiệp để kinh nghiệm của tôi được hoàn chỉnh hơn, đồng thời cũng giúp đỡ tôi tiến bộ hơn trong giảng dạy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Hải Dương, tháng 03 năm 2014

Tác giả

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Tạp chí toán học và tuổi trẻ.*

2. *Phương pháp ứng dụng đạo hàm để giải các bài toán luyện thi đại học - HUỲNH CÔNG THÁI (Biên soạn).*

3. *Một số tư liệu trên mạng.*